

F. Birardi

Non cancella non.

(Una nota sulla impossibilità di dimostrare l'equivalenza della doppia negazione per i sistemi formali del prim' ordine)

---

Parole chiave: formalismo, intuizionismo, incertezza.

Abstract: La costruzione di un controesempio aritmetico coerente con gli assiomi di Zermelo e Fraenkel che contraddice l'equivalenza della doppia negazione relega l'equivalenza della doppia negazione al sistema logico elementare classico della certezza e la esclude dai sistemi simbolici formalizzati del primo ordine. Le proposizioni aritmetiche impiegate danno luogo ad una tipologia di incertezza distinguibile dalla proprietà sfuggente di Brouwer per i numeri irrazionali.

---

L'equivalenza della doppia negazione si può dimostrare per diretta e costruttiva applicazione delle definizioni di negazione e di equivalenza, oppure, come nei Principia Mathematica [18, p. 101], per implicazione simmetrica. Intendiamo stabilire se queste dimostrazioni del calcolo proposizionale elementare sono estendibili al livello del calcolo predicativo del primo ordine. Si considera tale estensione come ovvia, mentre è evidente che ovvia non è almeno per la logica intuizionista.

Per brevità presupporremo l'esistenza di un dizionario col quale si fabbricano frasi ed espressioni. Presupporremo anche una facoltà di valutazione, di attribuire o meno un valore di verità alle espressioni. Una espressione valutabile è una proposizione.

Due espressioni, proposizioni, sono uguali se consistono delle stesse parole nello stesso ordine.  $p$ ,  $\neg p$ ,  $\neg\neg p$  sono diverse, comunque sia scritta  $p$ . Adottiamo:

I.1) Il sistema logico formale dei Principia Mathematica e di Hilbert-Ackerman come sinteticamente presentati in Gödel [6] e [7].

I.2) Il sistema di assiomi per la teoria astratta degli insiemi di Zermelo e Fraenkel come in [12] e [19].

I.1) e I.2) sono realizzazioni dei Systeme I incompleti di Gödel come l'aritmetica di Peano e la matematica classica di Von Neumann.

Ogniquale volta definiamo un insieme  $X$ ,  $x \in X$  si legge come  $x$  appartiene a (o è elemento di)  $X$  e rispetta gli assiomi di Zermelo e Fraenkel per la costituzione di  $X$  come insieme.

Definizione:  $P$  e  $T$  sono, rispettivamente, l'insieme delle proposizioni e dei teoremi.

L'equivalenza è una relazione binaria tra gli elementi di  $P$ ,  $T$  che è riflessiva, simmetrica e transitiva. E' una semplice conseguenza che i teoremi, in quanto proposizioni dimostrate vere, sono equivalenti.

Ci proponiamo di vedere che l'equivalenza della doppia negazione non è dimostrabile in generale ovvero valida per tutte le proposizioni di  $P$ . A tal fine prima definiremo i concetti di autoriflessione, di circuito logico, di sovrapposizione nodale e poi vedremo mediante un controesempio che le dimostrazioni dirette e per simmetria del calcolo elementare non si estendono ai sistemi incompleti I. Poi dimostreremo che le proposizioni del tipo incontrato nel controesempio sono astrattamente deducibili con gli assiomi di Zermelo e Fraenkel e con le regole e formule dei Principia.

Sia  $F$  l'insieme delle proposizioni caratteristiche.  $F$  è sottoinsieme di  $P$ .

Definizione di autoriflessione: Data la funzione caratteristica per ciascun sottoinsieme di  $P$ :

$$\exists f \in F : e = \{p : p \in P \wedge f(p)\} \wedge f(e) \wedge f \in \{p : p \in P \wedge f(p)\}.$$

Una proposizione caratteristica (o una funzione caratteristica per gli elementi di un insieme) è autoriflessiva se è elemento dell'insieme da essa estensivamente determinato.

Un circuito logico di  $P$  è una sequenza di proposizioni di  $P$  e teoremi di  $T$  legati da implicazioni e connettivi coerentemente con I.1 e I.2. Diremo che due circuiti logici si sovrappongono nodalmente se in qualche punto delle rispettive successioni logiche definiscono il medesimo oggetto o insieme. Ciò equivale ad ammettere che esistono due proposizioni caratteristiche diverse che definiscono estensivamente il medesimo oggetto:

$$\exists f, f' \in F : f \neq f' \wedge \{p : p \in P \wedge f(p)\} = \{p : p \in P \wedge f'(p)\}.$$

Va sottolineato che, se si uniscono le due proposizioni formali appena scritte, rendendo  $f$  autoriflessiva nell'ultima, il nodo così determinato può essere contraddittorio. Nella lingua questo accade sovente. Nell'esempio che vado a costruire, ho scelto il caso più semplice che mi è venuto in mente.

Iniziamo col considerare genericamente "quelle proposizioni che consistono di 10 parole". Si considerino i seguenti tipi della contraddizione della circolarità di Russell:

$e$  = "Lo insieme di tutte le proposizioni che consistono di undici parole".  $e$  consiste di 11 parole ed è autoriflessiva (self referential).

$s$  = "Lo insieme di tutte le proposizioni consistenti di undici parole".  $s$  consiste di 10 parole e non è autoriflessiva.

Possiamo scrivere formalmente,  $e = \{p : p \in P \wedge g(p) = 11\}$  dove  $g$  è definita come una mappa da  $P$  nei numeri naturali e una funzione che conta le parole di una proposizione assegnata. Possiamo persino osservare che con  $n$  parole possiamo costruire  $n^{11}$  espressioni che si qualificano per l'ammissione in  $s$ . Possiamo usare l'assioma di estensionalità e scrivere  $e = s$ . Infatti "che consistono" e "consistenti" identificano la stessa funzione  $g$ . Si noti bene: nonostante che  $e, s$  siano scritte diverse, la matematica degli insiemi le identifica a mezzo della funzione  $g$  e afferma che le due proposizioni si equivalgono nel definire e caratterizzare il medesimo insieme indifferentemente *nominato*  $e, s$ .

$\omega$  = "Lo insieme di tutte le proposizioni che caratterizzano lo insieme  $s$ ".  $\omega$  consiste di 11 parole ed appartiene ad  $s$ . Ciò non accade se si sostituisce "che caratterizzano" con "caratterizzanti":

$\omega' =$  "Lo insieme di tutte le proposizioni caratterizzanti lo insieme  $s$ ".

Ognuna delle proposizioni  $e, s, \omega, \omega'$  identifica sia una proposizione caratteristica che l'insieme da questa caratterizzato. Gli insiemi caratterizzati sono identici, mentre le proposizioni caratterizzanti differiscono. Vorremmo distinguere formalmente i due aspetti, ma non possiamo: le equazioni che definiscono i simboli  $e, s, \neg e, \omega, \omega'$  sono formalizzate con costitutivi che sono anche *parole* contate da  $g$ . Bisognerebbe introdurre un formalismo sensibile ai due contesti proposizione ed insieme, ma non vi è alcunché nel calcolo elementare e nel calcolo dei predicati del I ordine che possa essere sfruttato in questo senso. Ciascuno dei simboli indicati corrisponde dualmente e alla proposizione e all'insieme. Dobbiamo accogliere ciascuna equazione di definizione con la sua propria ambiguità e dualità di intenzione ed estensione.

**Teorema 1 (Sufficienza). In generale,  $\forall p \in P$ , la dimostrazione elementare della equivalenza della doppia negazione non si può estendere ai sistemi I incompleti di Gödel.**

Come proposizioni abbiamo che  $\omega \neq \omega'$  ed essendo  $g(\omega) = 11$ , mentre  $g(\omega') = 10$ , ne segue che  $\omega \in s \wedge \omega' \notin s$ . Tuttavia, essendo  $\omega$  ed  $\omega'$  insiemi di proposizioni, in base all'assioma di estensionalità scriviamo  $\forall p((p \in \omega \equiv p \in \omega') \Rightarrow \omega = \omega')$ . Vale a dire che, avendo  $\omega$  ed  $\omega'$  i medesimi elementi, si identificano in quanto insiemi.

Da questo, dal tema di fondo che anima l'intera ricerca dei Principles di Russell, segue una successione di nodi contraddittori:

Primo nodo (contraddittorio): . Si parte da  $\omega \in s \wedge \omega' \notin s$  usando la funzione  $g$  e poi si identifica  $\omega$  con  $\omega'$  mediante l'assioma di estensionalità. Ne segue  $\omega \in s \wedge \omega \notin s$ ,  $\omega' \in s \wedge \omega' \notin s$ .

Secondo nodo (possibilmente contraddittorio):  $\neg\omega$  e  $\neg\omega'$  sono proposizioni diverse e caratterizzano insiemi uguali per estensionalità.  $g(\neg\omega) \geq 12$ ,  $g(\neg\omega') \geq 11$ . Allora può essere vero che  $\neg\omega \notin s \wedge \neg\omega' \in s$ . Essendo  $\neg\omega = \neg\omega'$  per estensionalità, si può produrre una contraddizione simile alle precedenti.

Terzo nodo (non contraddittorio):  $\neg\neg\omega$  and  $\neg\neg\omega'$  sono proposizioni differenti e insiemi uguali per estensionalità. Soltanto per le doppie negazioni v'è certezza: dal momento che  $g(\neg\neg\omega) \geq 13$  and  $g(\neg\neg\omega') \geq 12$ , abbiamo  $\neg\neg\omega \notin s \wedge \neg\neg\omega' \notin s$  da cui la dualità di proposizione caratterizzante ed insieme caratterizzato non genera contraddizione.

Lungo l'intero ragionamento abbiamo scoperto che  $\omega$  e  $\neg\neg\omega$ ,  $\omega'$  e  $\neg\neg\omega'$  non possono essere espressioni valutabili con lo stesso valore di verità, dal momento che le due doppie negazioni non risultano contraddittorie relativamente ad  $s$ , al contrario di quanto accade per  $\omega$  ed  $\omega'$ . Da questo consegue che ogni circuito logico che affermi l'esistenza di  $\omega$  ed  $s$  è privo di equivalenza della doppia negazione. Infatti vale  $\exists g(p) \in F \subset P : \exists \omega \in P \Rightarrow \exists \neg\neg\omega \in P$ , essendo la premessa assurda (esiste una proposizione caratteristica che afferma l'esistenza di un oggetto che appartiene e non appartiene ad  $s$ ), ma non vale  $\exists \neg\neg\omega \in P \Rightarrow \exists \omega \in P$ , essendo la premessa non contraddittoria e contraddittoria la conclusione, sempre relativamente ad  $s$ . In conclusione, per le semplici proposizioni  $\omega, \neg\neg\omega \in P$ , vale  $\omega \Rightarrow \neg\neg\omega \wedge \neg(\neg\neg\omega \Rightarrow \omega)$ . Lo stesso vale per  $\omega'$ . La liberatoria intuizione di Brouwer.

Applichiamo la negazione agli elementi di  $P$  costruendo  $P'.\{\neg p, \neg\neg p\}$  è un elemento rappresentativo dell'insieme potenza di  $P'$ :  $\mathcal{P}(P')$  (dall'assioma dell'insieme potenza). Continuiamo negando ciascun elemento di  $P'$  ed ottenendo  $P''.\{\neg\neg p\}$  è un elemento dell'insieme potenza di  $P''$ .

Usiamo la differenza e definiamo  $P - P' = P_+$ . Dall'assioma dell'insieme potenza  $\{p\} \in \mathcal{P}(P_+)$ . Negando  $P$  abbiamo ottenuto, idealisticamente, un insieme di proposizioni ciascuna contenente almeno una negazione. Formando la differenza cancelliamo da  $P$  ogni proposizione che contiene almeno una volta la negazione. Anche se il nome non mi piace, dirò che così restano le proposizioni "positive". Usiamo la differenza e definiamo  $P' - P'' = \neg P_+$ . Dall'assioma dell'insieme potenza  $\{\neg p\} \in \mathcal{P}(\neg P_+)$ . In questo modo abbiamo potuto definire un insieme con ciascun elemento privo di negazione, un insieme con ciascun elemento che la contiene una volta, un insieme con ciascun elemento che la contiene due volte. Tutti sottoinsiemi di  $P$ , anche la loro unione.

La funzione contraddittoria di Russell e l'operazione di negazione definiscono una mappa  $P \mapsto P$ .

Lemma:  $p = \neg\neg p$  è condizione sufficiente affinché la doppia negazione possa stabilire l'identità per la mappa  $P \mapsto P$ .

$\forall p \in P$ , se  $p = \neg\neg p$  allora la negazione degli elementi di  $\neg P_+$  consiste di elementi  $\neg\neg p$  in  $P''$  e  $P'' = P_+$ . Ma il viceversa non è vero in generale: se, dati i due insiemi, si presume che  $P'' = P_+$ , allora a ciascun elemento di  $P''$  si può far corrispondere un solo elemento di  $P_+$ , ma ciò non esclude una semplice permutazione come  $p = \neg\neg q$  and  $q = \neg\neg p$ . Pertanto  $P'' = P_+$  non stabilisce la necessità di  $p = \neg\neg p$ .

Se  $p$  e  $\neg\neg p$  sono identificate sul dominio aperto di  $P$ , allora, costruttivamente, si possono identificare  $P''$  e  $P_+$  e ciò determina l'esistenza della identità per la mappa  $P \mapsto P$ . Ma l'identità di due insiemi  $P''$  e  $P_+$  non è sufficiente per identificare  $p$  e  $\neg\neg p$  sul dominio di  $p$ . Qui è manifesta la differenza tra identità generica e identità insiemistica: L'identità dei due insiemi consente di affermare che per ciascun elemento dell'uno posso trovare al più un elemento dell'altro ad esso uguale, ma non dice quale: sappiamo che c'è, ma qual'è?

C'è un deficit di istruzioni per recuperare  $p$  da  $\neg\neg p$ . L'idea diffusa che "non cancella non" e che sta alla base del recupero, vale genericamente: finché non raccolgo in una classe o specie. "non cancella non" determina, per i sistemi I, una procedura di recupero di  $p$  che identifica in modo virtuale  $\neg\neg p$  con  $p$ . E' altresì evidente che l'identificazione virtuale è possibile soltanto mediante la valutazione  $p \equiv \neg\neg p$ . Se esistesse una formula di recupero dovrebbe avere le seguenti caratteristiche: Relativamente alla funzione contraddittoria di Russell e Whitehead, si definisca l'operatore  $\chi$ , tale che  $\chi(p) = \neg p$ ,  $\chi(\neg p) = \neg\neg p$ . La negazione è reversibile se  $\exists \chi^{-1}$  tale che (leggere la composizione da destra)  $\chi^{-1} \circ \chi(p) = p$  e  $\chi \circ \chi^{-1}(\neg p) = \neg p$ . Inoltre, si deve verificare, per ricorrenza, che  $\chi^{-1} \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ \chi(p) = p$  e  $\chi \circ \chi \circ \chi^{-1} \circ \chi^{-1}(\neg\neg p) = \neg\neg p$ . Pertanto bisogna definire due identità: una per  $P_+$  e una per  $P''$ . A queste condizioni si può sempre recuperare  $p$  da  $\neg\neg p$ . Ciò implica idempotenza tra  $P_+$  e  $P''$  e fa sì che la

corrispondenza sia la identità. Si sottolinea che dominio e codominio di  $\chi$  sono in  $P$ : sono costituiti da proposizioni. La funzione di valutazione la esaminiamo ora.

Conviene rappresentare i valori con  $+1$  e  $-1$  come in Basic. La negazione determina la funzione di valutazione  $\phi: P \mapsto \{1, -1\} \times \{1, -1\}$ . La notazione Basic semplifica la composizione di  $\phi$  sfruttando  $\phi(\neg p) = -\phi(p)$ :

$$\begin{array}{ccccc} P_+ & \mapsto & \neg P_+ & \mapsto & P'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \phi(p) & \mapsto & -\phi(p) & \mapsto & -(-\phi(p)) \end{array}$$

La freccia verticale si interpreta come una proiezione. Una volta ammessi i possibili valori di  $p$ , questi devono alternarsi di segno. Di solito ciò si interpreta col kantiano dover essere. Adesso però va aggiunto che, data la sola sufficienza di  $p = \neg\neg p$  vista nel lemma precedente sulla identità, ogniqualvolta si pesca una proposizione in  $P$  si deve estrarre sia la doppia negazione che la proposizione stessa. Vale a dire devo affermare che, in base agli assiomi di Zermelo, sono in grado di estrarre la coppia ordinata  $(p, \neg\neg p)$  e, con completezza, la terna ordinata  $(p, \neg p, \neg\neg p)$ , ogniqualvolta estraggo indifferentemente un elemento da  $P, P_+, \neg P_+, P''$ . Questa è proprio una bella pretesa, perchè non è stata definita esplicitamente una regola formale per farlo. Anche gli assiomi per i piccoli insiemi (coppie, terne,...) non valgono a tal scopo. Il limite risiede proprio nella nozione di insieme che si fonda sulla qualità di differenza ed eguaglianza, e non su quella di ordine. Posso soltanto affermare come congettura che il complesso di negazioni dei simboli di appartenenza e dei quantificatori dei sistemi del primo ordine sono sufficienti a determinare formalmente una procedura di recupero di  $p$  in generale,  $\forall p \in P$ . Non si tratta di una congettura semplice: Ogniqualvolta che trovo  $\neg\neg p$  devo poter trovare la corrispondente  $p$  e come è possibile se  $p$  è scritta diversa da  $\neg\neg p$  e l'ipotesi assurda  $p = \neg\neg p$  non vale per necessità? Cercare nell'insieme concorde serve a poco, perché quest'ultimo è oggetto di una proiezione, e abbiamo appena visto che è possibile scambiare  $p$  con  $q$ . Si può prendere fischi per fiaschi.

Nella dissertazione del 29 [4][9, p.67], Gödel aggiunge gli assiomi (7)  $x = x$  and (8)  $x = y \Rightarrow (F(x) \Rightarrow F(y))$ . In questo senso esteso si ottiene  $x = y \Rightarrow (F(x) \equiv F(y))$ , per simmetria. Scegliendo per  $F$  la identità sul dominio di  $x, y$  e usando il lemma sulla identità otteniamo per le proposizioni  $p, q$  in  $P$ :

$$\begin{array}{l} p = q \Rightarrow (p \equiv q) \\ p = \neg\neg p \Rightarrow (p \equiv \neg\neg p). \end{array}$$

quest'ultima la interpretiamo: se in  $P$  si può specificare, per negazione, un dominio di  $p$  oggetti ed un dominio di  $\neg\neg p$  oggetti per cui vale l'identità, allora i rispettivi valori coincidono. Il sistema esteso di Gödel ci riporta al circuito logico da cui siamo partiti come il solo non contraddittorio e di nuovo indica la necessità di separare un insieme di proposizioni per cui vale l'identità.

Se si cerca di separare in  $P$  le proposizioni autoriflessive si finisce dritti nell'antinomia di Russell o contraddizione di circolarità per il dominio della totalità. Questo significa che le proposizioni autoriflessive non sono separabili in  $P$  in modo non

contraddittorio. Si può soltanto salvare la totalità con l'assioma di separazione. C'è sempre qualche elemento che non appartiene ad un insieme, dunque il dominio totale è aperto e non è un insieme. Ma né l'assioma, né il teorema di separazione possono escludere le proposizioni incerte per negazione e le proposizioni che per autoriflessione vanno in conflitto con gli oggetti specificati e impediscono così a  $\phi$  di alternare. Le proposizioni che presentano invarianza del valore per negazione. Sono classi di proposizioni del tipo  $\omega$ , che abbiamo visto nella prima dimostrazione di impossibilità, e classi di proposizioni del tipo  $\beta$ , quest'ultime scoperte da Brouwer in concomitanza alla enunciazione della proprietà sfuggente per i numeri irrazionali.

A questo punto è evidente, ricordando il contenuto del primo teorema di impossibilità, che qualora  $\phi$  fallisca nell'alternare, allora il sistema di negazioni formali dei quantificatori del prim'ordine non può agire secondo le astratte necessità indicate per  $\chi$  e questo accade per le proposizioni invarianti per ricorrenza del tipo  $\omega$  e del tipo  $\beta$ . La forma basilare proposta da Brouwer [2, p.31] è relativa all'incertezza di affermare la presenza di un particolare segmento -ordinato e finito- nello sviluppo decimale di un numero irrazionale conosciuto:  $\pi$ .

**Teorema 2: In generale, è impossibile dimostrare l'equivalenza della doppia negazione.**

Si introducano gli assiomi 7 ed 8 di Gödel, ottenendo  $(p = \neg\neg p) \Rightarrow (p \equiv \neg\neg p)$ . Si consideri  $\neg\neg\omega \in P''$ . A quale elemento di  $P_+$  corrisponde  $\neg\neg\omega$ ? Non può corrispondere con  $\omega$ , dal momento che  $\neg\neg\omega$  è significativa nel determinare  $s$  mentre  $\omega$  risulta contraddittoria e  $\phi$  non alterna. Vogliamo far corrispondere  $\neg\neg\omega$  con  $\omega'$ ? Se così fosse, con quale elemento  $\neg\neg\omega' \in P''$  corrisponde in  $P_+$ ? La relazione non è l'identità e non è l'identità perché non può essere una corrispondenza.

Non presenterei simili problemi, senza una soluzione. La soluzione richiede una costruzione logica e matematica. Tuttavia, essendo anche intuitiva, concluderò questo scritto presentando la parte intuitiva.

L'equivalenza della doppia negazione è dimostrabile genericamente ed a livello elementare, ma non è dimostrabile in generale. Ciò la qualifica come proposizione primitiva della logica classica. Pertanto è postulabile, e, come primo postulato, esclude dai sistemi I analizzati da Gödel le proposizioni con invarianza per negazione del tipo speciale  $\omega$ . Non esclude tuttavia le proposizioni dotate di invarianza per negazione del tipo generale  $\beta$  analizzate da Brouwer. Relativamente a queste ultime risulta necessaria una costruzione piuttosto sofisticata e poco intuitiva.

Il postulato di equivalenza non è dimostrabile. Dunque c'è un postulato che non si scambia con i teoremi. I sistemi formali sono relativi.

### Bibliografia

- [1] Boole, G., 1854, An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. (1976, Torino).
- [2] Brouwer, L., 1981, Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism. Cambridge (1983, Torino).
- [3] Carnap R., 1958, Introduction to symbolic logic and it's applications, New York.
- [4] Courant R and Robbins H., 1941, What is mathematics, Oxford-New York (1971, Torino).
- [5] Gödel, K., 1929, "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls", in Gödel, K., 1986: 60-101.
- [6] Gödel, K, 1930, "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", Monatshefte für Mathematik und Physik, 37, in Gödel, K., 1986: 102-123.
- [7] Gödel, K, 1931, "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I", Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, in Gödel, K., 1986: 144-195.
- [8] Gödel, K.,1932, "Zum Intuitionistischen Aussagenkalkül", Anzeigen der Akademie der Wissenschaften in Wien, 69. in Gödel, K., 1986, 222-225.
- [9] Gödel, K.,1932, "Heyting-Arend: Die Intuitionistische Grundlegung der Mathematik", Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete", 2, in Gödel, K., 1986: 286-295.
- [10] Gödel, K., 1986, Collected Works 1, Oxford.
- [11] Hilbert D. and Cohn-Vossen S., Geometry and the Imagination,(1990, New York).
- [12] Kuratowski, K. and Mostowski, A., 1976, Set theory, Amsterdam,
- [13] Lewis, C.I., 1918, A survey of symbolic logic, Berkeley.
- [14] Mazzacua, G., 1973, Alle origini della logica matematica, Messina-Firenze.
- [15] Nagel E. e Newman J., 1958, Gödel's proof, (1974, Torino).
- [16] Quine W., 1965, Elementary logic, Harvard (1968, Roma).
- [17] Russell B, 1903, The principles of mathematics (1974, Perugia).
- [18] Russell B. and Whitehead A., 1910, Principia mathematica (1970, Cambridge)
- [19] Skolem T.A., 1962, Abstract set theory, University of Notre Dame.
- [20] Wittgenstein L., 1969, On certainty, Oxford (1978, Torino).